

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO A GRUPA 17. lipnja 2011.

1. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
(ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!
a) $2y^2 - y' = 5x^2$, b) $y' = \frac{y}{e^x} - \ln x$, c) $(\sin x) \cdot y' = e^x$, d) $y' - 3x^5 = 2y$, e) $e^y + y' = x$.
(iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' - \frac{3}{x}y = 2x$.
2. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
(ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$, $2 \leq r \leq 5$.
(iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.
3. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
(ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' - \frac{3}{x}y = 2x$, $y(2) = 8$.
(iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

4. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
(ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
(iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y'' + 3y' - 10y = 0$.
5. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
(ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = x + y$ i D zadano s $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
(iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO B GRUPA 17. lipnja 2011.

1. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
(ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = 2x + y$ i D zadano s $2 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 4$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
(iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).
2. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
(ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
(iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' - y' - 6y = 0$, $y'' - 2y' + 17y = 0$, $y'' - 4y' + 4y = 0$.
3. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
(ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!
a) $(\cos x) \cdot y' = 3^x$, b) $3y^3 - y' = 4x^3$, c) $y' = \frac{y}{2x} - \log_3 x$, d) $2^y + y' = -x$, e) $y' - 2x^4 = 3y$.
(iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' - \frac{4}{x}y = 3x$.
4. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
(ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{11\pi}{6}$, $1 \leq r \leq 2$.
(iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.
5. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
(ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' - \frac{4}{x}y = 3x$, $y(1) = 6$.
(iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO C GRUPA 17. lipnja 2011.

1. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
- (ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = x + 2y$ i D zadano s $1 \leq x \leq 4$, $2 \leq y \leq 3$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
- (iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).

2. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
- (ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!

a) $3^y + y' = x$, b) $y' - 4x^2 = 5y$, c) $y' = \frac{y}{e^x} - \log_2 x$, d) $(\sin x) \cdot y' = 2^x$, e) $4y^2 - y' = 2x^4$.

- (iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' - \frac{5}{x}y = 2x$.
3. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
- (ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{5\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$, $3 \leq r \leq 5$.
- (iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.

4. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
- (ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' - \frac{5}{x}y = 2x$, $y(1) = 2$.
- (iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

5. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
- (ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
- (iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y'' - 7y' + 12y = 0$, $y'' - 6y' + 10y = 0$.

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO - GRUPA A 17. lipnja 2011.

1. (i) Prelaskom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy.$$

(2 boda)

- (ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

2. Odredite obujam tijela omeđenog ravninama s jednažbama: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $2x + y + z = 2$. (3 boda)

3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednažbe

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednažbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (1 bod)

4. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednažbe

$$y' = \frac{y+4}{x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednažbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)

5. Odredite opće rješenje diferencijalne jednažbe

$$y' = \frac{y}{x} - 5.$$

(3 boda)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO - GRUPA A 17. lipnja 2011.

1. (i) Prelaskom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy.$$

(2 boda)

- (ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

2. Odredite obujam tijela omeđenog ravninama s jednažbama: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $2x + y + z = 2$. (3 boda)

3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednažbe

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednažbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (1 bod)

4. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednažbe

$$y' = \frac{y+4}{x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednažbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)

5. Odredite opće rješenje diferencijalne jednažbe

$$y' = \frac{y}{x} - 5.$$

(3 boda)

1. Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = \frac{y}{x} - 7.$$

(3 boda)

2. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = \frac{y+3}{x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet
- $y(1) = 0$
- . (1 bod)

3. (i) Prelaskom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy.$$

(2 boda)

- (ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

4. Odredite obujam tijela omeđenog ravninama s jednačbama:
- $x = 0$
- ,
- $y = 0$
- ,
- $z = 0$
- i
- $2x + y + z = 4$
- . (3 boda)

5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y'' + y' - 2y = e^{-2x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete
- $y(0) = 1$
- ,
- $y'(0) = 1$
- . (1 bod)

1. Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = \frac{y}{x} - 7.$$

(3 boda)

2. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y' = \frac{y+3}{x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet
- $y(1) = 0$
- . (1 bod)

3. (i) Prelaskom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy.$$

(2 boda)

- (ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

4. Odredite obujam tijela omeđenog ravninama s jednačbama:
- $x = 0$
- ,
- $y = 0$
- ,
- $z = 0$
- i
- $2x + y + z = 4$
- . (3 boda)

5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y'' + y' - 2y = e^{-2x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete
- $y(0) = 1$
- ,
- $y'(0) = 1$
- . (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO - GRUPA C 17. lipnja 2011.

1. Odredite obujam tijela omeđenog ravninama s jednadžbama: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $2x + y + z = 6$. (3 boda)
2. (i) Prelaskom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\int_0^6 dx \int_0^{\sqrt{6x-x^2}} dy.$$

(2 boda)

- (ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

3. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{y}{x} - 2.$$

(3 boda)

4. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (1 bod)

5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{y+2}{x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO - GRUPA C 17. lipnja 2011.

1. Odredite obujam tijela omeđenog ravninama s jednadžbama: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $2x + y + z = 6$. (3 boda)
2. (i) Prelaskom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\int_0^6 dx \int_0^{\sqrt{6x-x^2}} dy.$$

(2 boda)

- (ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

3. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{y}{x} - 2.$$

(3 boda)

4. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (1 bod)

5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{y+2}{x}.$$

(2 boda)

- (ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)